clasele

7-8

Gheorghe Căiniceanu (coord.) | Emilia-Ștefania Răducan
Mariana Draga-Tătucu | Cora-Ionela Dăniasă | Daniela Lădaru
Carmen-Victorița Chirfot | Tomiță-Constantin Vasile
Elena Rîmniceanu | Melissa-Cătălina Draga-Tătucu

MATEMATICĂ

Olimpiade și concursuri școlare

2025

Editura Paralela 45

CUPRINS

ENUNȚURI

clasa a VII-a

1. olimpiade

ETAPA LOCALĂ

Alba

7.O.1. a) Demonstrați că: $\dfrac{1}{(k-\sqrt{2})(k+1-\sqrt{2})}=\dfrac{1}{(k-\sqrt{2})}-\dfrac{1}{(k+1-\sqrt{2})}$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$.

b) Dacă $x=\dfrac{44+24\sqrt{2}}{98}$ și

$$y=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2}-4)^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-9)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2}-10)^2}},\text{ atunci } \frac{y}{x}\in\mathbb{Z}.$$

7.O.2. Aflați numerele prime p și q de două cifre, pentru care $pq+1$ este pătrat perfect.

Gazeta Matematică 2023

7.O.3. Se dă un triunghi ascuțitunghic ABC, $AB = AC$. Fie D mijlocul laturii BC, iar E și F simetricele punctului D față de dreptele AB, respectiv AC.

a) Demonstrați că patrulaterul $BCFE$ este trapez isoscel.

b) Demonstrați că patrulaterul $AEDF$ este romb dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

7.O.4. Cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ se intersectează în A și P, iar secanta BP, $B\in\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$, intersectează $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ în C. Fie B', respectiv C' diametral opuse lui A în $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$, respectiv $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$. Arătați că:

a) Punctele B', P, C' sunt coliniare;

b) $\sphericalangle O_1BA \equiv \sphericalangle O_2CA$.

Arad

7.O.5. a) Se consideră numerele:

$$a=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{12}}+\frac{3}{\sqrt{27}}+\frac{4}{\sqrt{48}}\right):\frac{2}{3}\text{ și } b=\frac{\sqrt{26^2-10^2}}{\sqrt{20^2-16^2}}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}+\left|2\sqrt{5}-5\right|-\left(5-2\sqrt{5}\right).$$

Calculați $(a+b)\cdot|a-b|$.

b) Calculați pătratul numărului c, unde $c=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}}.$

7.O.6. Determinați numerele raționale m și n pentru care are loc egalitatea:

$$\frac{m}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{45 - 10\sqrt{14}} + n\sqrt{9 + 2\sqrt{14}} = \sqrt{2} + 9\sqrt{7}.$$

7.O.7. În triunghiul ABC, $\sphericalangle B = 90°$, bisectoarea unghiului A intersectează latura BC în D și perpendiculara în C, pe AC, în E. Fie $EF \parallel BC$, $F \in AB$.

a) Arătați că ΔCDE este isoscel.

b) Demonstrați că $CDFE$ este romb.

7.O.8. Fie $ABCD$ pătrat și punctul E aparține segmentului DC. Fie $F \in BC$ astfel încât B să fie între F și C, iar $DE = BF$. Fie G aparține segmentului BC astfel încât $AE = FG$. Notăm M mijlocul segmentului AG și $AE \cap FM = \{N\}$.

a) Arătați că $GQ \perp AF$, unde $FM \cap AB = \{Q\}$.

b) Arătați că $ABGN$ este trapez dreptunghic.

Argeș

7.O.9. Se consideră suma: $S = \frac{1}{(1+2^{-1})(1+2^{2})} + \frac{1}{(1+2^{-2})(1+2^{3})} + ... + \frac{1}{(1+2^{-2024})(1+2^{2025})}$.

a) Demonstrați că $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{1+2^{2025}}$;

b) Arătați că $[2025 \cdot S] < 675$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

7.O.10. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil cu $AD = DC$. Notăm cu P piciorul perpendicularei din D pe BC. Prelungim segmentul BC cu un segment $CS = AB$.

a) Demonstrați că triunghiul BDS – isoscel.

b) Să se arate că $AB + BC = 2BP$.

7.O.11. Fie

$$S_1 = \sqrt{1+3+5+7} + \sqrt{1+3+5+7+9} + \sqrt{1+3+5+7+9+11} + ... + \sqrt{1+3+5+7+9+11+13+...+2023}.$$

a) Determinați suma S_1.

b) Aflați ultima cifră a sumei $S_2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + ... + 2023$.

7.O.12. Fie $ABCD$ un dreptunghi având $AB > BC$, cu $AC \cap BD = \{O\}$ și bisectoarea unghiului ABC și BD fac unghi cu măsura egală cu 15°. Bisectoarea unghiului ABC intersectează diagonala AC în punctul P și latura DC în punctul E. Arătați că ΔCOE și ΔPOE sunt triunghiuri isoscele.

Bacău

7.O.13. a) Aflați valorile posibile ale numărului natural n, știind că mulțimea:

$$A = \left\{\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}, ..., \sqrt{2025}\right\} \text{ conține 20 de numere raționale.}$$

b) Fie mulțimea $B = \{x + y \mid x, y \in A\}$. Dacă $n = 1$, aflați numărul elementelor raționale ale mulțimii B.

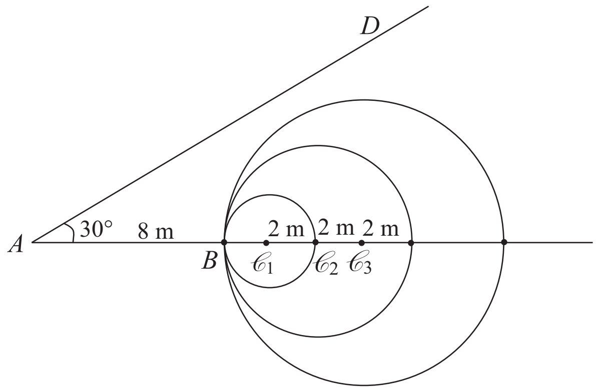
7.O.14. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, cu baza mare AB. Notăm mijlocul diagonalei BD cu E și piciorul perpendicularei duse din D pe AB cu F. Demonstrați că dreapta AC este paralelă cu EF.

7.O.15. Se consideră pătratul $ABCD$, punctele E_1, E_2, E_3 situate pe latura CD și F_1, F_2, F_3 situate pe latura AB, astfel încât $\frac{\mathcal{A}_{AF_1E_1D}}{\mathcal{A}_{BF_1E_1C}} = \frac{\mathcal{A}_{AF_2E_2D}}{\mathcal{A}_{BF_2E_2C}} = \frac{\mathcal{A}_{AF_3E_3D}}{\mathcal{A}_{BF_3E_3C}} = \frac{2}{3}$. Demonstrați că dreptele E_1F_1, E_2F_2 și E_3F_3 sunt concurente.

7.O.16. Se consideră numărul prim p și numărul natural a, mai mare decât p.

a) Aflați numărul a în funcție de p. dacă $\frac{a+p}{a-p}$ este număr natural.

b) Aflați numărul p, dacă $\sqrt{\frac{a+p}{a-p}}$ este număr natural.



7.O.148. Fie pătratul $ABCD$ și M un punct pe latura BC. De aceeași parte a dreptei AB se construiește pătratul $AMNP$.
a) Arătați că punctele P, D, C sunt coliniare. b) Demonstrați că dreptele AC și CN sunt perpendiculare.

Teleorman

7.O.149. a) Fie $a = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + ... + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{4098600}}$. Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care $\sqrt{n \cdot a}$ este număr natural.
b) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care:

$$N = \frac{\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}}{x-7}$$

este număr întreg.

7.O.150. a) Aflați x știind că este îndeplinită condiția: $\frac{x+1}{2025} = \frac{\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + ... + \frac{1}{1+2+3+...+2024}}{2024}$.

b) Arătați că numărul $\sqrt{a}$ este rațional, unde $a = \left(2024 + \frac{1013}{\sqrt{1+3+5+...+2025}}\right)^{2025} : 2025$.

7.O.151. Fie ABC un triunghi echilateral, $D \in BC$ astfel încât $DC \equiv BC$ și $E \in AC$ astfel încât $AE \equiv AC$. Dacă $DE \cap AB = \{F\}$, arătați că $AB = 3AF$.

7.O.152. Fie M și N puncte pe diagonala AC a paralelogramului $ABCD$, de o parte și de alta a dreptei BD, astfel încât $OM = ON$, O fiind intersecția diagonalelor, iar punctul M este situat între punctele A și O. Dreptele BM, DM, BN și DN intersectează laturile AD, AB, DC, respectiv BC, în punctele F, E, G, respectiv H. Demonstrați că patrulaterul $EFGH$ este paralelogram.

Timiș

7.O.153. a) Demonstrați că numărul $A = 2025 - \frac{1+2+3+4+...+2025}{\sqrt{1+3+5+7+...+2025}}$ este natural.

b) Fie x și y numere reale nenule, astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2025}$. Calculați $\sqrt{(x-2025)\cdot(y-2025)}$.

7.O.154. a) Arătați că $A = \sqrt{n^{20} + n^{24}}$ este irațional pentru orice n număr natural nenul.

b) Determinați numerele naturale n pentru care numărul $a = \sqrt{11-\sqrt{11-\sqrt{11+n}}}$ este rațional.

2. Concursuri interjudețene

„Alexandru Papiu-Ilarian”, Târgu-Mureș, 19 octombrie 2024

7.C.1. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care $\frac{a+1}{2}=\frac{b+2}{3}=\frac{c+3}{4}$ și $\frac{2}{a+1}+\frac{3}{b+2}+\frac{4}{c+3}\in\mathbb{N}$.

7.C.2. În triunghiul echilateral ABC se consideră $AD\perp BC$ și N mijlocul lui AB. Pe prelungirea lui BC luăm punctul M astfel încât $BM = BD$, $B\in MD$, iar $MN\cap AD=\{P\}$. Demonstrați că CP este perpendiculară pe AM.

Gazeta Matematică

7.C.3. Un număr natural $\overline{abc}$ se numește „număr papiist 2024” dacă este prim și $\frac{38}{a^2+b^2+c^2}\in\mathbb{N}$. Câte „numere papiiste 2024” sunt?

Florica Gința și Vasile Gința

7.C.4. O fortăreață aflată pe o insulă, nu departe de țărm, are amprenta la sol un pătrat. Pentru că nu ne putem apropia de fortăreață, ne așezăm într-un punct M pe țărm și, cu un telemetru (aparat de măsurat distanțe), măsurăm distanța de la punctul M la cele trei colțuri vizibile ale fortăreței: distanța de la punctul M la colțul A este de 33 m, distanța de la punctul M la colțul B este de 91 m și distanța de la punctul M la C este de 85 m. Cât este aria amprentei la sol a fortăreței?

Dorel Duca

„Speranțe Olimpice”, Pașcani, 9 noiembrie 2024

Subiectul I

7.C.5. Fie numărul rațional $x=(3\sqrt{3}-\sqrt{26})^{100}$.

a) Demonstrați că $3\sqrt{3}-\sqrt{26}<\frac{1}{8}$.

b) Aflați primele 90 de zecimale ale numărului x.

7.C.6. Fie $a=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}$.

a) Demonstrați că $\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}, n>1$.

b) Demonstrați că $0{,}2<\sqrt{\frac{a}{11}}<0{,}3$.

Subiectul al II-lea

7.C.7. Se dau mulțimile: $A=\left\{a_n \mid a_n\in\mathbb{Q}, a_n=\frac{n^2-n+4}{n^2+1}, n\in\mathbb{N}, 1\le n\le 100\right\}$ și

$B=\left\{b_n \mid b_n\in\mathbb{Q}, b_n=\frac{n^2-n+6}{n^2+2}, n\in\mathbb{N}, 1\le n\le 100\right\}$.

a) Aflați card A și card B.

b) Demonstrați că suma $(\text{card } A)^{4k+2}+(\text{card } B)^{4k}$ este divizibilă cu 5, pentru orice $k\in\mathbb{N}$.

clasa a VIII-a

1. olimpiade

ETAPA LOCALĂ

Alba

8.O.1. a) Stabiliți cărui interval îi aparține fiecare din numerele reale a și b, știind că:

$$9a^2 - 12a + 4b^2 - 4b = 20.$$

b) Dacă $x - 4y + 1 = 0$ și $x \in [-1; 3]$, aflați $A = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$.

8.O.2. a) Verificați identitatea: $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Determinați partea întreagă a numărului: $a = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{1}{2023^2}+\frac{1}{2024^2}}$.

8.O.3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, E mijlocul segmentului AB și F centrul feței $ADD'A'$. Arătați că:

a) BD' este paralelă cu planul determinat de punctele A', E și D;

b) $C'F$ este perpendiculară pe planul determinat de punctele A', E și D.

8.O.4. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă.

a) Determinați dreapta de intersecție dintre planele $(A'BC)$ și $(B'AC)$.

b) Arătați că intersecția planelor $(A'BC)$, $(B'AC)$ și $(C'AB)$ este un punct T.

c) Arătați că TG este perpendicular pe planul (ABC), unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Gazeta Matematică 2023

Arad

8.O.5. a) Se consideră un număr natural n și definim mulțimea $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + n - 6| \leq 3n + 4\}$.

a) Scrieți mulțimea A_1 sub formă de interval.

b) Aflați numărul natural n pentru care A_n conține exact 609 numere întregi.

8.O.6. Fie $a = \sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}} + \sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}$ și $b = \sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}} - \sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}$, unde $x < 2025$ este un număr natural prim. Determinați x pentru care numărul $\frac{a}{b}$ este întreg.

8.O.7. Fie triunghiul echilateral ABC cu $AB = 15\sqrt{2}$ cm și $D \notin (ABC)$, astfel încât $AD = BD = CD = 15$ cm. În triunghiul ABD, semidreapta AP este bisectoarea $\sphericalangle DAB$, $P \in BD$, iar în triunghiul ADC, semidreapta AQ este bisectoarea $\sphericalangle DAC$, $Q \in CD$. Se consideră $T \in AD$, astfel încât $\frac{TD}{TA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Să se arate că:

a) $(PTQ) \parallel (ABC)$;

b) $AD \perp PQ$.

Dolj

8.O.69. Se consideră expresia $E(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 3) - (2x - 1)^2 - (3x + 1)(x + 1) + 12$, unde x este număr real.

a) Arătați că pentru orice număr natural par a, numărul $A = E(a) + 3$ este divizibil cu 4.

b) Determinați numerele întregi n pentru care numărul întreg $E(n)$ are valoare minimă.

8.O.70. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$, $VA = AB = 12$ cm și $AC \cap BD = \{O\}$. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor BC, respectiv VO.

a) Determinați cosinusul unghiului dreptelor AC și MN.

b) Demonstrați că dreapta MN este perpendiculară pe planul (VAD).

8.O.71. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{4}}{1+\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{\sqrt{n+2}}{1+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}=\frac{17+\sqrt{3}}{2}.$$

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2024

8.O.72. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctul M este proiecția punctului B pe dreapta $A'C$, punctul N este proiecția punctului A pe planul $(A'CD)$ și punctul P este simetricul punctului D față de punctul C.

a) Arătați că dreapta CM este perpendiculară pe planul $(C'BD)$.

b) Demonstrați că punctele N, M și P sunt coliniare.

Galați

8.O.73. Dacă a, b, c sunt trei numere reale și $2\left(2a\sqrt{3}-b\sqrt{15}+3c\sqrt{2}\right)=a^2+b^2+c^2+45$, calculați $(a^2+b^2+c^2)^2$.

8.O.74. Fie a, b, c trei numere raționale nenule, astfel încât $a + b \neq 0$, $b + c \neq 0$, $c + a \neq 0$ și $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$. Arătați că valoarea expresiei $E=\frac{a(2a+7)}{b+c}+\frac{b(2b+7)}{c+a}+\frac{c(2c+7)}{a+b}$ este număr natural prim.

Gazeta Matematică nr. 10/2024

8.O.75. Fie $ABCDA'B'C'D'$ paralelipiped dreptunghic și M, N, P proiecțiile punctelor A, C, respectiv B', pe diagonala BD'.

a) Arătați că $BM + BN + BP = BD'$.

b) Demonstrați că $3(AM^2 + B'P^2 + CN^2) \geq 2(BD')^2$ dacă și numai dacă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

8.O.76. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor DAB, DBC, respectiv DCA.

a) Demonstrați că planele $(G_1G_2G_3)$ și (ABC) sunt paralele.

b) Calculați aria triunghiului $G_1G_2G_3$, știind că lungimile laturilor triunghiului ABC, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ verifică egalitatea $a + b + c + ab + ac + bc = 6\sqrt{abc}$.

Giurgiu

8.O.77. a) Arătați că $\sqrt{n+1-\sqrt{2n+1}}=\frac{\sqrt{2n+1}-1}{\sqrt{2}}$, pentru orice număr natural n.

b) Se dă numărul $x=\frac{\sqrt{2025+\sqrt{4049}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2025-\sqrt{4049}}}{\sqrt{2}}$. Stabiliți dacă numărul x este rațional.

2. Concursuri interjudețene

„Alexandru Papiu-Ilarian”, Târgu-Mureș, 19 octombrie 2024

8.C.1. a) Determinați intervalul $[x, y] \subset \mathbb{R}$, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

1) $[x, y] \cap \mathbb{Z} = \varnothing$; 2) $|y-x-1| = x^2 + y^2 + \frac{x}{2} - 2y + \frac{21}{16}$.

b) Arătați că există o infinitate de numere iraționale x și y cu proprietatea că $x + y = xy \in \mathbb{N}$.

8.C.2. a) Arătați că $\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1} \le 2\sqrt{a}$ pentru orice număr real $a \ge 1$.

b) Determinați partea întreagă a numărului real:

$$A = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{4}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{\sqrt{2022}+\sqrt{2024}}{\sqrt{2023}}.$$

Gazeta Matematică 2024

8.C.3. Se consideră triunghiul ABC, D, $E \in BC$, astfel încât $AB^2 = BD \cdot BC$ și $\sphericalangle CAE = \sphericalangle ABC$. Arătați că:

a) $AC^2 = CE \cdot CB$; b) triunghiul ADE este isoscel; c) $AD^2 = BD \cdot CE$.

Ovidiu Pop

8.C.4. Se consideră triunghiul ABC, cu $AB < AC$ și D un punct oarecare pe latura AC. Fie AE bisectoarea unghiului BAC, cu $E \in BD$, F mijlocul segmentului AD, iar $AE \cap BF = \{G\}$, $DG \cap AB = \{H\}$. Arătați că $HD \parallel BC$ dacă și numai dacă $AB = CD$.

„Speranțe Olimpice”, Pașcani, 9 noiembrie 2024

Subiectul I

8.C.5. Arătați că ecuația $x^2 - 15y^2 = 1$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor întregi.

8.C.6. Rezolvați ecuația $|x + 1| + |x^2 - 2023x - 2024| = 2023(1 + |x - 2024|)$ în mulțimea numerelor reale.

Subiectul al II-lea

8.C.7. Demonstrați că există o infinitate de perechi (a, b) de numere iraționale, pentru care $a - b = ab \in \mathbb{Q}$.

8.C.8. Dacă a, $b > 0$ și $ab = 1$, atunci $\frac{a^5}{a^3+1} + \frac{b^5}{b^3+1} \ge 1$.

Subiectul al III-lea

8.C.9. Se dă triunghiul ABC în care $AB > AC$. Bisectoarea unghiului exterior din vârful A intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în E. Fie $EF \perp AB$, $F \in AB$. Să se demonstreze că $AB - AC = 2AF$.

8.C.10. Se consideră șase puncte în spațiu, oricare patru necoplanare. Se colorează cu verde sau negru fiecare segment determinat de două dintre aceste puncte. Arătați că există trei puncte printre acestea care determină un triunghi cu laturile la fel colorate.

soluții

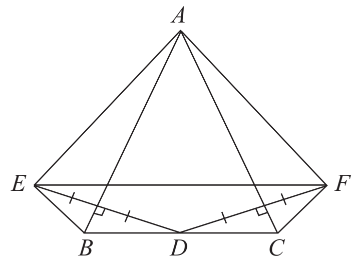
Clasa a VII-a

1. OLIMPIADE

ETAPA LOCALĂ

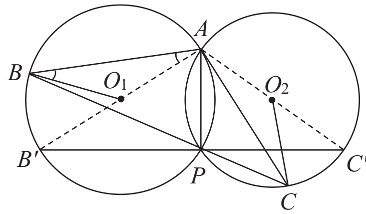
Alba

7.O.1. a) $\frac{1}{(k-\sqrt{2})(k+1-\sqrt{2})} = \frac{(k+1-\sqrt{2})-(k-\sqrt{2})}{(k-\sqrt{2})(k+1-\sqrt{2})} = \frac{k+1-\sqrt{2}}{(k-\sqrt{2})(k+1-\sqrt{2})} - \frac{k-\sqrt{2}}{(k-\sqrt{2})(k+1-\sqrt{2})} = \frac{1}{k-\sqrt{2}} -$ $- \frac{1}{k+1-\sqrt{2}}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$; b) $y = \frac{1}{\left|\sqrt{2}-2\right|\cdot\left|\sqrt{2}-3\right|} + \frac{1}{\left|\sqrt{2}-3\right|\cdot\left|\sqrt{2}-4\right|} + \ldots + \frac{1}{\left|\sqrt{2}-9\right|\cdot\left|\sqrt{2}-10\right|} = \frac{1}{(2-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} + \ldots +$ $+ \frac{1}{(9-\sqrt{10})(10-\sqrt{2})} \overset{a)}{=} \frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{10-\sqrt{2}} = \frac{8}{22-12\sqrt{2}}$. Deci $\frac{y}{x} = 2$.



7.O.2. Alegem $p < q$ și notăm $pq + 1 = x^2$, $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow pq = (x-1)(x+1) \Rightarrow p = x - 1$ și $q = x + 1 \Rightarrow q = p + 2$. Obținem perechile (11, 13); (17, 19); (29, 31); (41, 43); (59, 61); (71, 73).

7.O.3. a) ΔABC isoscel $\Rightarrow AD$ bisectoare și perpendiculară pe BC (1); $\Delta BED \equiv$ $\equiv \Delta CFD$ (isoscele) $\Rightarrow BE = CF$, $\frac{\sphericalangle DBE}{2} = \frac{\sphericalangle DCF}{2}$. Deci $\Delta EBA \equiv \Delta CFA$ (LUL) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta AEF$ isoscel, bisectoarea $AD \perp EF$ (2). Deci (1), (2) $\Rightarrow EF \parallel BC$ și mai avem $BE = CF$; b) „$\Rightarrow$" Desigur $AE = AF = AD$ și deci dacă $AEDF$ e romb $\Rightarrow \Delta AED$ echilateral și desigur $\sphericalangle BAC = 2 \cdot 30°$ „$\Leftarrow$" $\Delta AED \equiv \Delta AFD$, echilaterale $\Rightarrow AEDF$ romb.



7.O.4. a) $\sphericalangle APB' = 90° = \sphericalangle APC' \Rightarrow B', P, C'$ coliniare; b) $\sphericalangle O_1BA \equiv \sphericalangle O_1AB$. Patrulaterul $APB'B$ este inscriptibil $\Rightarrow \sphericalangle O_1AB \equiv \sphericalangle B'AB \equiv \sphericalangle B'PB \overset{\text{opus vârf}}{\equiv} \sphericalangle C'PC$. Dar și $PCC'A$ este inscriptibil $\Rightarrow \sphericalangle C'PC \equiv \sphericalangle CAC' \equiv \sphericalangle CAO_2 \equiv \sphericalangle O_2CA$ (ΔO_2CA isoscel).

Arad

7.O.5. $a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{^{(2}2}{2\sqrt{3}} + \frac{^{(3}3}{3\sqrt{3}} + \frac{^{(4}4}{4\sqrt{3}}\right) : \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = 2\sqrt{3}$; $b = \frac{\sqrt{576}}{\sqrt{144}} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} + (5-2\sqrt{5}) -$ $- (5-2\sqrt{5}) = \frac{24}{12} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$. $(a+b) \cdot |a-b| = (2\sqrt{3}+3\sqrt{2}) \cdot \underbrace{\left|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right|}_{<0} = (2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}) = (3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2 =$ $= 18 - 12 = 6$; b) $c = \frac{1-\sqrt{3}}{1-3} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7} + \ldots + \frac{\sqrt{119}-\sqrt{121}}{119-121} = \frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\ldots+\sqrt{119}-\sqrt{121}}{-2} =$ $= \frac{1-11}{-2} = 5 \Rightarrow c^2 = 25$.

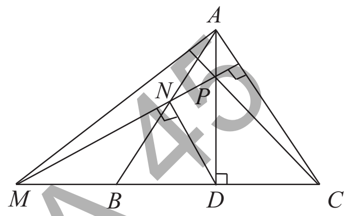
7.O.6. Egalitatea din enunț este echivalentă cu $m \cdot \sqrt{9-2\sqrt{14}} + n\sqrt{9+2\sqrt{14}} = \sqrt{2} + 9\sqrt{7}$. $\sqrt{9-2\sqrt{14}} = \sqrt{7-2\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}+2} =$ $= \sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2} = \underbrace{\left|\sqrt{7}-\sqrt{2}\right|}_{>0} = \sqrt{7}-\sqrt{2}$; $\sqrt{9+2\sqrt{14}} = \sqrt{7+2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}+2} = \sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2} = \underbrace{\left|\sqrt{7}+\sqrt{2}\right|}_{>0} = \sqrt{7}+\sqrt{2}$.

2. CONCURSURI INTERJUDEȚENE

„**A**lexandru **P**apiu **I**larian”, Târgu-Mureș, 19 octombrie 2024

7.C.1. $\frac{a+1}{2} = \frac{b+2}{3} = \frac{c+3}{4} = k \Rightarrow a = 2k - 1,\ b = 3k - 2,\ c = 4k - 3 \Rightarrow \frac{2}{a+1} + \frac{3}{b+2} + \frac{4}{c+3} = \frac{3}{k} \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \{1, 3\}$.
Pentru $k = 1 \Rightarrow a = 1,\ b = 1,\ c = 1 \Rightarrow \overline{abc} = 111$. Pentru $k = 3 \Rightarrow a = 5,\ b = 7,\ c = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 579$.

7.C.2. ΔABC – echilateral, AD este și mediană $\Rightarrow D$ – mijlocul BC; N – mijlocul $AB \Rightarrow ND$ – linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow ND \parallel AC$. Cum $NB = BD = BM \Rightarrow \sphericalangle MND = 90° \Rightarrow ND \perp MP$. Din $ND \parallel AC$, $ND \perp MP \Rightarrow AC \perp MP$. Cum $AC \perp MP$, $AD \perp BC$ și $MP \cap AD \cap CP = \{P\} \Rightarrow P$ – ortocentrul $\Delta AMC \Rightarrow CP \perp AM$.



7.C.3. $\frac{38}{a^2+b^2+c^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \in \{1, 2, 19, 38\}$. Dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 1,\ b = c = 0 \Rightarrow \overline{abc} = 100$. Dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 2 \Rightarrow \overline{abc} \in \{101, 110\}$.
Dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 19 \Rightarrow \overline{abc} \in \{133, 313, 331\}$. Dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 38 \Rightarrow \overline{abc} \in \{116, 161, 611, 235, 253, 325, 352, 532, 523\}$. Așadar există 4 „numere papiiste 2024”: 101, 313, 331, 523.

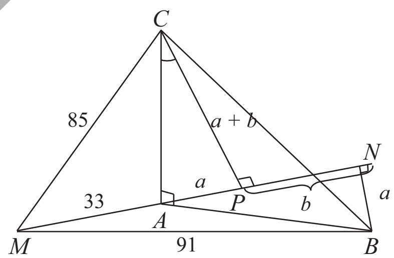
7.C.4. Avem $MA = 33$ cm, $MB = 91$ cm și $MC = 85$ cm. Evident MA este în interiorul $\sphericalangle BMC$. Pe prelungirea laturii MA luăm punctele N și P, astfel încât $BN \perp AM$ și $CP \perp AM$. Pentru că $MC < MB \Rightarrow P \in AN$. Notăm $AP = a$, $PN = b$ și $x = AB = AC$. Fie $\sphericalangle ACP = y \Rightarrow \sphericalangle PAC = 90° - y \Rightarrow \sphericalangle NAB = 90° - (90° - y) = y \Rightarrow \sphericalangle BAN \equiv \sphericalangle ACP$.

$$\Delta PAC \equiv \Delta NBA \overset{\text{IU}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \sphericalangle CPA \equiv \sphericalangle ANB\ (= 90°) \\ AC \equiv BA \text{ (ipotenuze şi laturi ale pătratului la sol)} \Rightarrow \\ \sphericalangle ACP \equiv BAN (= y) \end{cases}$$

$\Rightarrow AP = BN = a,\ CP = AN = AP + PN = a + b$.

În ΔPMC, $\sphericalangle P = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} MC^2 = PC^2 + PM^2 \Rightarrow 85^2 = (a + b)^2 + (33 + a)^2$ (1)

În ΔNBM, $\sphericalangle N = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} MB^2 = BN^2 + NM^2 \Rightarrow 91^2 = a^2 + (a + b + 33)^2$ (2).



Scăzând (1) din (2) $\Rightarrow (91 - 85)(91 + 85) = \cancel{a^2} + \cancel{(a+b)^2} + 2(a + b) \cdot 33 + 33^2 - \cancel{(a+b)^2} - (33 + a)^2 \Rightarrow 6 \cdot 176 =$
$= \cancel{a^2} + \cancel{66a} + 66b + \cancel{33^2} - \cancel{33^2} - \cancel{a^2} - \cancel{66a} \Rightarrow 66b = 1056 \Rightarrow b = 16$ cm. Înlocuim în (1) $\Rightarrow 85^2 = (a + 16)^2 + (33 + a)^2 \Rightarrow 7225 = a^2 + 32a + 256 + 1089 + 66a + a^2 \Rightarrow 2a^2 + 98a + 1345 = 7225 \Rightarrow 2a^2 + 98a = 5880\ |:2 \Rightarrow a^2 + 49a = 2940 \Rightarrow a(a + 49) = 2940 = 35 \cdot 84 \Rightarrow a = 35$ m. În ΔNAB, $\sphericalangle N = 90° \Rightarrow AB^2 = NB^2 + NA^2 \Rightarrow x^2 = a^2 + (a + b)^2 \Rightarrow x^2 = 35^2 + 51^2 = 3826 \Rightarrow \mathscr{A}_{\text{pătrat sol}} = x^2 = 3826$ m^2.

„**S**peranțe **O**limpice”, Pașcani, 9 noiembrie 2024

SUBIECTUL I

7.C.5. a) Prin calcul se arată că $3\sqrt{3} - \sqrt{26} < \frac{1}{8}$; b) $0 < x = (3\sqrt{3} - \sqrt{26})^{100} < \left(\frac{1}{2^3}\right)^{100} = \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{30} = \left(\frac{1}{1024}\right)^{30}$; $x <$
$< \left(\frac{1}{1024}\right)^{30} < \left(\frac{1}{1000}\right)^{30} = \left(\frac{1}{10^3}\right)^{30} = \left(\frac{1}{10}\right)^{90} = (0{,}1)^{90}$. Deci primele 90 de zecimale ale lui x sunt egale cu 0.

7.C.6. a) $(n - 1)n < n^2 < n(n + 1),\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > 1$; b)
$$\left.\begin{array}{l} n = 2 \Rightarrow \frac{1}{2\cdot 3} < \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2} \\ n = 3 \Rightarrow \frac{1}{3\cdot 4} < \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3} \\ \ldots \\ n = 100 \Rightarrow \frac{1}{100\cdot 101} < \frac{1}{100^2} < \frac{1}{99\cdot 100} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{100\cdot 101} <$$

Clasa a VIII-a

1. OLIMPIADE

ETAPA LOCALĂ

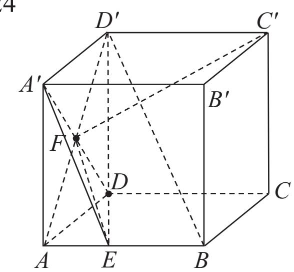
Alba

8.O.1. a) Ipoteza se scrie $(3a-2)^2+(2b-1)^2=25 \Rightarrow |3a-2| \le 5$, $|2b-1| \le 5 \Rightarrow -5 \le 3a-2 \le 5$, deci $a \in \left[-1, \frac{7}{3}\right]$, $-5 \le 2b-1 \le 5$, deci $b \in [-2, 3]$; b) Deoarece $x-4y+1=0$ avem $x+1=4y$ și $x-3=4(y-1)$; $A = \sqrt{(4y)^2+y^2} + \sqrt{[4(y-1)]^2+(y-1)^2} = \sqrt{17}(|y|+|y-1|$. Folosim $-1 \le x \le 3 \Rightarrow 0 \le 4y \le 4 \Leftrightarrow y \in [0, 1]$ și deci $A = \sqrt{17}(y+1-y) = \sqrt{17}$.

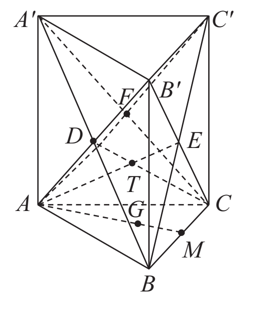
8.O.2. $1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} = 1-\frac{2(n+1)}{n(n+1)} + \frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2} = \left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2$.

Observație: O cale mai comodă decât artificiile de calcul, este ridicarea la pătrat; b) Folosind a) avem: $a = 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+1+\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024} = 1\cdot 2023+\frac{1}{1}-\frac{1}{2024} = 2024-\frac{1}{2024}$ deci $[a] = 2023$.

8.O.3. a) FE – linie mijlocie în $\Delta ABD' \Rightarrow FE \parallel D'B \Rightarrow BD' \parallel (A'ED)$; b) $\Delta A'DC'$ echilateral de latură $a\sqrt{2}$. $C'F$ este mediană a $\Delta A'DC' \Rightarrow C'F \perp A'D$ (1). Prin calcul $C'F = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $EF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $C'E = \frac{3a}{2}$. Din Teorema Reciprocă a lui Pitagora $\Rightarrow \sphericalangle C'FE = 90° \Rightarrow C'F \perp FE$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow C'F \perp (A'ED)$.



8.O.4. a) C este un punct comun, $A'D \cap B'A = \{D\}$ este al doilea punct comun $\Rightarrow CD$ este dreapta de intersecție; b) $B'C \cap BC' = \{E\}$, $A'C \cap AC' = \{F\}$. Avem $(A'BC) \cap (C'AB) = BF$, $(C'AB) \cap (B'AC) = AE$. În $\Delta B'AC$, AE și CD sunt mediane, și notăm centrul de greutate cu T. Avem $\frac{AT}{TE} = 2$. Dar AE este mediană și în $\Delta ABC'$, deci T este centrul de greutate și al acestui triunghi. Dar în $\Delta C'AB$, BF e mediană $\Rightarrow T \in BF$. Deci $(A'BC) \cap (B'AC) \cap (C'AB) = \{T\}$; c) Fie M mijlocul BC, ME – linie mijlocie în $\Delta CB'B \Rightarrow ME \parallel BB' \parallel CC'$. Dar $CC' \perp (ABC) \Rightarrow EM \perp (ABC)$. Dacă G e centrul de greutate în $\Delta ABC \Leftrightarrow \frac{AG}{GM} = 2$. Deci $\frac{AG}{GM} = \frac{AT}{TE} \overset{\text{R. Thales}}{\Rightarrow} TE \parallel EM \Rightarrow TG \perp (ABC)$.



Arad

8.O.5. a) Calculând A_1, obținem $|x+1-6| \le 3+4$, de unde rezultă $|x-5| \le 7$ și atunci $x \in [-2, 12]$, deci $A_1 = [-2, 12]$; b) Din proprietatea caracteristică a elementelor mulțimii A_n avem $|x+n-6| \le 3n+4$, de unde rezultă că $-3n-4 \le x+n-6 \le 3n+4$, deci $-4n+2 \le x \le 2n+10$. Deducem că $A_n = [-4n+2; 2n+10]$. Deoarece intervalul este închis la ambele capete, atunci înseamnă că numărul de numere întregi din intervalul respective va fi: $2n+10-(-4n+2)+1$. Cum A_n conține exact 609 numere întregi, avem $2n+10-(-4n+2)+1 = 609 \Rightarrow n = 100$.